§ 1. Рациональные уравнения и неравенства

Всякое *уравнение* или *неравенство* относительно *неизвестной* x записывается в виде

$$f(x) \vee g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения[1], зависящие от переменной x, а $\vee$ — здесь и всюду ниже один из знаков $=$, $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$.

К простейшим рациональным уравнениям и неравенствам можно отнести, во-первых, ***линейное***

$$ax + b \vee 0,$$

решаемое стандартными преобразованиями, и, во-вторых, ***квадратное***

$$ax^2 + bx + c \vee 0 \quad (a \neq 0),$$

левая часть которого представляет собой *квадратный трёхчлен* $f(x)$.

Пара корней квадратного уравнения задаётся формулой

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Обычно в этой формуле корни обозначаются $x_{1,2}$, но тогда не ясно, какой из них соответствует знаку «плюс», а какой — знаку «минус». Этим числам разрешается и совпадать: в этом случае квадратное уравнение формально имеет только один корень[2].

Для решения же квадратного неравенства бывает полезно:

• разложить его левую часть на *линейные множители*, т. е. привести её к виду

$$f(x) = a(x - x_+)(x - x_-);$$

• применить следующее основное утверждение о знаке квадратного трёхчлена: *пусть*

$$a > 0,$$

тогда неравенство

$$f(x) < 0$$

выполнено между корнями, а неравенство

$$f(x) > 0$$

выполнено за корнями.

---

[1] Функции.

[2] А квадратный трёхчлен — по-прежнему два.

Здесь предполагается, что подкоренное выражение, фигурирующее в формуле корней квадратного трёхчлена и называемое его *дискриминантом*, принимает неотрицательное значение. В противном случае — корней нет, разложение на линейные множители не возможно, а квадратный трёхчлен во всех точках имеет один и тот же знак.

Пример 1.1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0.$$

Решение[1].

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-3x+3} \leqslant 0,$$

$$(x-2{,}5)(x+1) \leqslant 0, \quad \text{так как } x^2-3x+3>0 \quad (D<0).$$

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$.

Основным способом решения неравенства

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) \vee 0,$$

левая часть которого представляет собой произведение, а правая — равна нулю, считается *перебор* всех таких случаев знаков сомножителей $f_i(x)$, при которых произведение имеет требуемый в неравенстве знак.

Метод интервалов применяется для решения ***рациональных*** неравенств, приведённых к *стандартному* виду

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n} \vee 0,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа[2]. Он позволяет организованно исследовать знак произведения, стоящего в левой части неравенства, опираясь на следующее рассуждение:

- точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбивают числовую ось на промежутки[3], на каждом из которых произведение имеет *фиксированный знак*;
- на самом *правом* из получившихся промежутков произведение заведомо *положительно*, так как на нём положителен каждый из его сомножителей;

---

[1] В тексте приводимых нами решений всюду между двумя последовательными уравнениями, неравенствами, системами или совокупностями подразумевается знак равносильности.

[2] Возможно, и отрицательные — тогда соответствующие множители с самого начала стоят в знаменателе.

[3] *Интервалы*, отсюда и название метода.

• далее, если двигаться по числовой оси справа налево, то при переходе через очередной корень x_i *меняет знак* множитель $x - x_i$ и только он, поэтому знак произведения либо меняется — когда соответствующая степень k_i нечётна, либо не меняется — когда она чётна;

• наконец, для завершения исследования достаточно выяснить, в каких точках x_i произведение *равно нулю*, а в каких — *не имеет смысла*, что определяется знаком степени k_i.

Пример 1.2. Решите неравенство

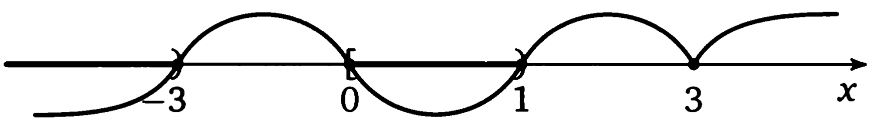
$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4}.$$

Решение.

$$\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3} \geqslant \frac{x}{4},$$

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2+2x-3} \leqslant 0,$$

$$\frac{x(x-3)^2}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0.$$



Ответ: $x<-3$, $0 \leqslant x < 1$, $x=3$.

При преобразованиях выражений и, в частности, при разложении их на множители иногда помогают *формулы сокращённого умножения*:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ — *квадрат суммы*;
$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ — *квадрат разности*;
$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ — *разность квадратов*;
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ — *куб суммы*;
$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ — *куб разности*;
$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ — *сумма кубов*;
$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$ — *разность кубов*.

Тренировочные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $x^2 - 2010x + 2009 = 0.$

2. $x^2 + 2010x - 2011 = 0.$

3. $x^2 + 2011x + 2010 = 0.$

4. $x^2 - 2010x + 2009 < 0.$

5. $x^2 + 2010x - 2011 \leqslant 0.$

6. $x^2 + 2011x + 2010 \geqslant 0.$

7. $(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 4 = 0.$

8. $(x+1)^4 - 3(x+1)^2 - 4 < 0.$

9. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0.$

10. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} \leqslant 0.$

11. $\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14} = \frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}.$

12. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$

13. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) < 1680.$

14. $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$

15. $\frac{(2-x^2)(x-3)^2}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geqslant 0.$

16. $\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2} \geqslant 0.$

17. $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30} > 0.$

18. $\frac{x^2+x+1}{x^2-4x-5} < 0.$

19. $\frac{x^2-6x+9}{5-4x-x^2} \geqslant 0.$

20. $\frac{5x-x^2-4}{x^2-4x+4} \geqslant 0.$

21. $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4.$

22. $\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2.$

23. $\frac{3x-5}{x^2+4x-5} > \frac{1}{2}.$

24. $\dfrac{5-2x}{3x^2-2x-16}<1.$

25. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\dfrac{1}{2}.$

26. $\dfrac{19-33x}{7x^2-11x+4}>2.$

27. $\dfrac{4}{1+x}+\dfrac{2}{1-x}<1.$

28. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}>\dfrac{1}{x}.$

29. $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{9}{x-3}+1<0.$

30. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1.$

31. $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5.$

32. $(x^2-2x)(2x-2)-9\dfrac{2x-2}{x^2-2x}\leqslant 0.$

33. $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant\dfrac{1}{x-3}.$

34. $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}+1\leqslant 0.$

35. $\dfrac{1}{x^2+8x-9}\geqslant\dfrac{1}{3x^2-5x+2}.$

36. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}}\geqslant 0.$

37. $\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{15}{88-32x}\right)^2\geqslant 1.$

Подготовительные задачи

Решите следующие уравнения и неравенства:

1. $3x^2-7x+4=0.$

2. $3x^2-7x+4\leqslant 0.$

3. $3x^2-7x+6=0.$

4. $3x^2-7x+6>0.$

5. $3x^2-7x-6=0.$

6. $3x^2-7x-6>0.$

7. $3x^4-7x^2+4=0.$

8. $3x^4-7x^2+4<0.$

9. $3x^4-7x^2-6=0.$

10. $3x^4-7x^2-6\leqslant 0.$

11. $3x^6-7x^3-6=0.$

12. $3x^6-7x^3-6>0.$

13. $(x-1)(3-x)(x-2)^2>0.$

14. $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-x-1}<0.$