В некоторых простых случаях замена не обязательна.

Пример 34. *Решить уравнение*

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Используя нечетность синуса, перепишем уравнение в виде $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Последнее равенство выполняется в двух случаях: $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ или $x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Отсюда получаем $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

15. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=1$, удовлетворяющие условию $-2<x<1$.

16. Найдите корни уравнения $\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-\pi;\pi)$.

17. Найдите корни уравнения $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\pi)$.

18. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2\pi;2\pi)$.

19. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{3x}{5}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие промежутку $[-2;9)$.

20. Найдите корни уравнения $\sin\left(\frac{4x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[-8;12)$.

Линейные уравнения вида $a\cos x+b\sin x=c$

Если $a=0, b\neq 0$ или $a\neq 0, b=0$, то линейное уравнение $a\cos x+b\sin x=c$ приводится к простейшему уравнению $\sin x=\frac{c}{b}$ или $\cos x=\frac{c}{a}$.

Если a и b отличны от нуля, то данное линейное уравнение преобразуется к простейшему ***методом введения вспомогательного угла***. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 35. *Решить уравнение*

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x-\frac{1}{2}\cdot\cos x=1;$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=1;$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

Отсюда получаем $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2\pi n$ или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $m\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $m\in\mathbf{Z}$.

Пример 36. *Решить уравнение*

$$3\cos x+4\sin x=2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\cos x+\frac{4}{5}\cdot\sin x\right)=2;$$

$$\frac{3}{5}\cdot\cos x+\frac{4}{5}\cdot\sin x=\frac{2}{5}.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\cos\varphi\cdot\cos x+\sin\varphi\cdot\sin x=\frac{2}{5},$$

где $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$. Отсюда получаем

$$\cos(x-\varphi)=\frac{2}{5}.$$

Его решения имеют вид

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Подставляя $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$, имеем

$$x=\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Уравнение вида $a\cos x+b\sin x=c$, в случае, когда $c=0$, а коэффициенты a и b отличны от нуля, сводится к простейшему делением на $\cos x$ или $\sin x$.

Пример 37. *Решить уравнение*

$$\sin x-5\cos x=0.$$

Решение. Среди значений x, для которых $\cos x=0$, корней уравнения нет (если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$, а одновременно эти два равенства выполняться не могут). Значит, деление обеих частей уравнения на $\cos x$ не приведет к потере корней. Разделив, получим уравнение

$$\operatorname{tg}x-5=0,$$

откуда $x=\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$

Ответ: $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 38. *Решить уравнение*

$$8\sin 3x-15\cos 3x=1.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{8^2+15^2}=17$. Уравнение примет вид

$$\frac{8}{17}\sin 3x-\frac{15}{17}\cos 3x=\frac{1}{17}\ \Leftrightarrow$$

$$\sin 3x\cos\varphi+\cos 3x\sin\varphi=\frac{1}{17}\ \Leftrightarrow$$

$$\sin(3x+\varphi)=\frac{1}{17},$$

где $\cos\varphi=\frac{8}{17}$, $\sin\varphi=-\frac{15}{17}$. Тогда имеем

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n;$$

$$x=-\varphi+(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $\cos\varphi=\frac{8}{17}>0$, $\sin\varphi=-\frac{15}{17}<0$, то угол φ лежит в четвертой четверти и поэтому $\varphi=\arcsin\left(-\frac{15}{17}\right)=-\arcsin\frac{15}{17}$.

Ответ: $\arcsin\frac{15}{17}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{17}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

21. $\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}$.

22. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

23. Дано уравнение

$$\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=0.$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

24. Найдите корни уравнения $\sin 3x=\cos 3x$, принадлежащие отрезку $[0;4]$.

25. Найдите корни уравнения $\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x$, принадлежащие отрезку $[-1;6]$.

26. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x$, принадлежащие отрезку $[-1;4]$.

27. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$ на отрезке $[-3\pi;3\pi]$.

28. Найдите корни уравнения $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ на отрезке $[-2\pi;4\pi]$.

2.2. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям с помощью замены

В тех случаях, когда исходное уравнение может быть приведено к виду $f(g(x))=0$, то заменой $g(x)=t$ уравнение сводится к решению уравнения $f(t)=0$. Далее для каждого полученного корня t_k необходимо решить уравнение $g(x)=t_k$.